MEASUREMENT OF TOTAL HARMONIC DISTORTION USING GOERTZEL ALGORITHM

Petr Frenštátský
Master Degree Programme (2.), FEEC BUT
E-mail: xfrens00@stud.feec.vutbr.cz

Supervised by: Jiří Schimmel
E-mail: schimmel@feec.vutbr.cz

Abstract: In this contribution an alternative approach to measure a total harmonic distortion using Goertzel algorithm is presented. The apporach is compared with a determination of harmonics from a spectrum computed with Fast Fourier transform in the intent of computational complexity and precision of the obtained frequency components.

Keywords: DSP, THD, Goertzel

1 ÚVOD

Jednou ze základních vlastností lineárních zvukových zařízení, je přímo úměrný vztah amplitudy harmonického signálu mezi vstupem a výstupem. V opačném případě dochází vlivem přebuzení zařízení nebo vlivem nelineárních charakteristik komponent ke vzniku spektrálních složek, jenž jsou celistvým násobkem kmitočtu tónu přivedeného na vstup. Většinou se jedná o nežádoucí jev, který se snažíme eliminovat. Jednou z možností pro vyjádření míry nelineárního harmonického zkreslení je ukazatel celkového harmonického zkreslení (THD). Ten je vyjádřen jako poměr součtu výkonů všech vyšších harmonických složek a výkonu základní harmonické složky. Pro získání výkonů jednotlivých složek máme několik možností, např. odečítání složek z výkonového spektra nebo filtrace jednotlivých složek. V rámci tohoto článku se budeme zabývat získáním výkonových složek pomocí Goertzelova algoritmu.

1.1 GOERTZELŮV ALGORITMUS

Jedná se o algoritmus, díky kterému lze získat modul a fázi jedné spektrální složky signálu bez nutnosti počítat celé DFT spektrum. Pro efektivní výpočet DFT spektra používáme rychlý algoritmus zvaný rychlá Fourierova transformace, pro který platí podmínka, že délka transformace N musí být rovna mocnině dvou. Délka transformace ovlivňuje rozlišovací schopnost $\Delta f = \frac{F_{\mathrm{VZ}}}{N}$, kde F_{VZ} je vzorkovací kmitočet. V případě, že daná harmonická složka není celistvým násobkem Δf, musíme najít nejbližší kmitočet odpovídající násobku Δf. Díky tomu nezískáme správnou hodnotu amplitudy spektrální složky na požadovaném kmitočtu. V případě Goertzelova algoritmu neplatí omezení délky transformace N[2].

Bylo odvozeno, že na Goertzelův algoritmus se lze dívat jako na IIR filtraci [1] s přenosovou funkcí

$$H_k(z) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}}{1 - 2\cos(\frac{2\pi k}{N}) z^{-1} + z^{-2}}, \tag{1}$$

kdy na vstup filtru přivádíme vzorky analyzovaného signálu a na výstupu získáme vzorky postupně konvergující k dané k-té harmonické složce s tím, že konečnou hodnotu získáme ze vzorku $y[N]$. V případě použití struktury 2. kanonické, lze filtraci vstupního signálu $x[n]$ popsat stavovými rovnicemi[1]

$$
\begin{aligned}
s[n] &= x[n] + 2\cos(\frac{2\pi k}{N})s[n-1] - s[n-2], &(2)\\
y[n] &= s[n] - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}} s[n-1]. &(3)
\end{aligned}
$$

Jelikož nás zajímá pouze poslední vzorek, lze provádět $N+1$ iterací pro výpočet stavové proměnné $s[n]$ a v poslední iteraci použít násobení komplexním členem $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi k}{N}}$.

2 VÝPOČET CELKOVÉHO HARMONICKÉHO ZKRESLENÍ

Nejprve je nutné nalézt nejmenší možnou délku transformace N pomocí vztahu $N = \frac{F_{vz}}{f_z}$, kde f_z je kmitočet základního tónu, jenž zároveň vyjadřuje rozlišovací schopnost transformace. Lze tedy získat hodnoty modulů a fází přesně na kmitočtech odpovídající základnímu tónu a jeho vyšších harmonických. Například vzorkovací kmitočet je 48 000 Hz a kmitočet testovaného tónu je 1000 Hz. Délka transformace je rovna $N = 48$. Po dosazení $k = 1$ do přenosové funkce (2) získáme po N+*1* vzorcích spektrální složku odpovídající základnímu tónu, v případě $k = 2$ hodnotu 1. harmonické atd.

Jestliže pro daný kmitočet f_z nelze získat celočíselnou hodnotu N, je nalezena nejbližší celočíselná hodnota N. V tomto případě však k již není celočíselné, nicméně v [1] byl publikován zobecněný Goertzelův algoritmus, jenž vychází z Fourierovy řady a pro který celočíselná hodnota k není podmínkou. V našem rozboru budeme uvažovat případy, kdy k je celočíselné.

Pro výpočet celkového harmonického zkreslení uvažujeme pouze $K-1$ vyšších harmonických složek, pro které platí $Kf_z < \frac{F_{VZ}}{2}$. Potřebujeme tedy K iterací Goertzelova algoritmu, během kterých je nalezeno K spektrálních složek y_k, ze kterých vypočteme výkon pomocí vztahu

$$P_k = \frac{y_k y_k^*}{N^2}, \tag{4}$$

kde y_k^* je komplexně sdružená hodnota k y_k.

Ze získaných hodnot lze vypočíst celkové harmonické zkreslení pomocí vztahu

$$THD = \frac{P_2 + P_3 + \ldots + P_k}{P_1} \quad \text{pro} \quad k < \frac{F_{vz}}{2f_z}. \tag{5}$$

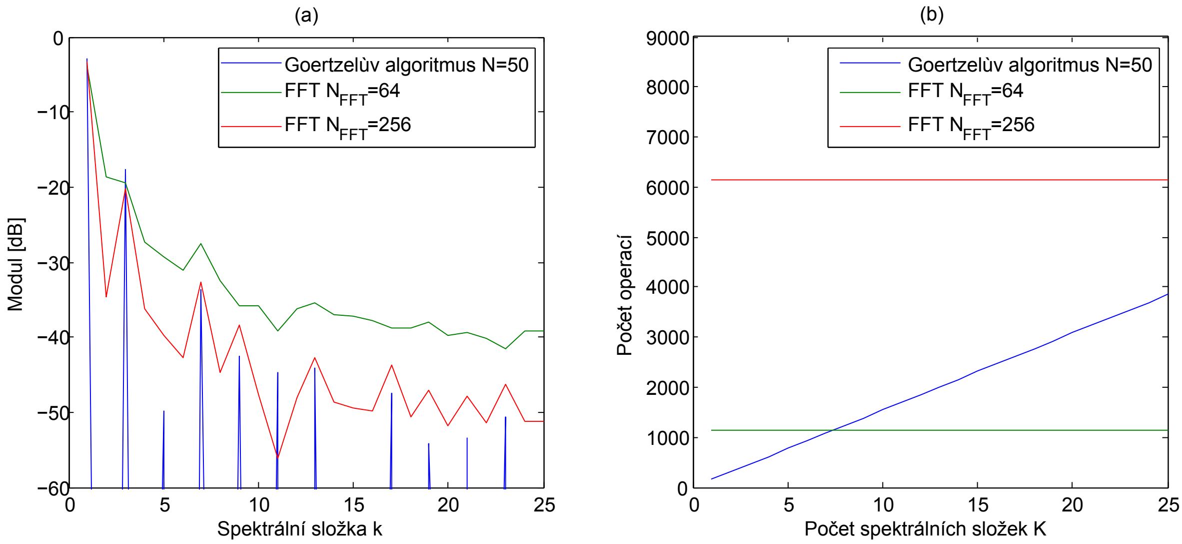
2.1 SROVNÁNÍ S ODEČÍTÁNÍM Z FFT SPEKTRA

Pro jednu iteraci Goerzlova algoritmu je potřeba provést $N+1$ násobení, $2N+1$ součtů a jedno komplexní násobení, které je reprezentované dvěma násobeními. Celkově je tedy nutné provést $3N+4$ operací. Tedy pro výpočet K spektrálních složek je nutné provést $K(3N+4)$ operací. V případě, že využíváme metodu odečtu složek ze spektra vypočteného pomocí FFT, je asymtotická složitost pro reálné signály rovna $3N_{\mathrm{FFT}}\log_2(N_{\mathrm{FFT}})$, kde N_{FFT} je délka transformace. Případy, kdy je výhodnější z hlediska výpočetní náročnosti použít Goerzlův algoritmus, lze vyjádřit nerovnici

$$K(3N+4) < 3N_{\mathrm{FFT}}\log_2(N_{\mathrm{FFT}}). \tag{6}$$

Pro FFT platí podmínka, že N_{FFT} musí být rovno mocnině dvou. V případě minimálního rozdílu mezi N_{FFT} a N a při vyšším počtu harmonických složek je z hlediska výpočetní náročnosti výhodnější použít odečítání ze spektra i za cenu horší rozlišitelnosti.

Pro srovnání obou metod budeme uvažovat amplitudově oříznutý harmonický signál s kmitočtem $f_z = 960\,\mathrm{Hz}$ při vzorkovacím kmitočtu 48 000 Hz, délku transformace $N = 50$ a pro FFT $N_{\mathrm{FFT}} = 64$ a $N_{\mathrm{FFT}} = 256$, pro které platí rozlišovací schopnosti $\Delta f = 750\,\mathrm{Hz}$ a $\Delta f = 187{,}5\,\mathrm{Hz}$. Vypočítáme FFT spektrum, ze kterého postupně odečítáme moduly harmonický složek. Pomocí Goertzelova algoritmu vypočítáme moduly jednotlivých spektrálních složek $k = 1 \dots K$. Srovnání výpočetní náročnosti v závislosti na počtu spektrálních složek vycházející ze vztahu 6 je zobrazeno na grafu na obrázku 1b a porovnání přesnosti zjištěných modulů na grafu na obr. 1a. V případě odečítání z FFT nelze najít spektrální složku odpovídající přesně kmitočtu harmonické složky, je modul zjištěn z nejbližšího možného kmitočtu.



Obrázek 1: Srovnání přesnosti zjištěných modulů spektrálních složek při použití Goertzelova algoritmu a při odečítání z FFT spektra s délkami transformace 64 a 256 (a) a výpočetní náročnosti (b).

Jak lze vyčíst z grafu na obr. 1a je rozdíl ve zjištěných modulech daných spektrálních složek při použití metody odečtu z FFT spektra s délkou transformace $N_{\mathrm{FFT}} = 64$ a Goertzelova algoritmu velký, střední kvadratická chyba je rovna 0,0327. V případě délky transformace $N_{\mathrm{FFT}} = 256$ se střední kvadratická chyba zmenší na 0,0099. Při porovnání teoretické výpočetní náročnosti (1b) mezi Goertzelovým algoritmem a FFT $N_{\mathrm{FFT}} = 64$ je pro $K > 7$ výhodnější použít FFT. V případě $N_{\mathrm{FFT}} = 256$ je pro daný kmitočet výpočetní náročnost mnohem vyšší. Musíme si však všimnout, že pro zadaný kmitočet je délka transformace N velmi malá a tedy ideální pro Goertzelův algoritmus. V případě nesoudělnosti kmitočtu harmonického tónu a vzorkovacího kmitočtu je nutné použít délku transformace $N = F_{\mathrm{VZ}}$ (při úvaze, že kmitočet harmonického tónu a k můžou být pouze celočíselné) a to má za následek, že se výpočetní náročnost při použití Goertzelova algoritmu velmi zvýší.

3 ZÁVĚR

V článku byla prezentována metoda pro výpočet celkového harmonického zkreslení pomocí Goertzelova algoritmu. Bylo ukázáno, že pomocí něj lze získat spektrální složky s velkou přesností a tím získat přesnější údaj o harmonickém zkreslení. V případě velkého počtu harmonických a při větší délce transformace N, je však výpočetní náročnost větší než v případě odečítání ze spektra vypočteného pomocí FFT.

REFERENCE

[1] Sysel, P.,Rajmic. P.:Zobecněný Goertzelův algoritmus pro neceločíselné násobky základního harmonického kmitočtu. *Elektrorevue*, ročník 2010, č. 2, 2010: ISSN 1213-1539

[2] Goertzel, G.: An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series. *American Mathematical Monthly*, ročník 65, č. 1, 1958: s. 34–35, ISSN 0002-9890