PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELECTRO-MAGNETIC WAVES IN WAVEGUIDES

Peter ŠAŠTINSKÝ, Bachelor Degree Programme (2)
FEI STU Bratislava
E-mail:

Michal ŠIROČKA, Bachelor Degree Programme (2)
FEI STU Bratislava
E-mail: Siro@manga.sk

Supervised by: Prof. Igor Bock

ABSTRACT

The paper deals with stationary wave equations for dielectric waveguides. The initial-boundary value problem for half-infinite region is solved. The (x,y) cross section is constant for each value of variable $z > 0$. The problem is solved using the Fourier method. The special cases of radial cross sections are considered.

1 ÚVOD

Táto práca prezentuje riešenie vlnových rovníc pre dielektrické vlnovody. Budeme nadväzovať na prácu [3], kde boli odvodené niektoré matematické modely šírenia vĺn a ich metódy riešenia. My sa zameriame na riešenie metódou zovšeobecnených Fourierových radov. Z matematického hľadiska je dielektrický vlnovod množina Q v priestore R^3 tvaru $Q = \Omega \times (0,\infty)$, kde $\Omega \subset R^2$ je ohraničená oblasť bodov (x, y) a premenná $z \in (0,\infty)$ vyjadruje šírenie elektromagnetických vĺn vo vlnovode. Pri odvodzovaní vlnových rovníc sa vychádza zo štyroch základných Maxwellových rovníc.

2 ROZBOR

Použitím známych vzťahov na rozloženie zdrojov elektrického poľa **E** a magnetického poľa **H** dostaneme vlnové rovnice pre nehomogénne prostredie tvaru:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \rho\mu \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\mathrm{grad}\, \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r},t).\mathrm{grad}\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})} \tag{2.1a}$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \rho\mu \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = -\varepsilon(\mathbf{r}).\mathrm{grad}\, \frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \times \mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \tag{2.1b}$$

Vidíme, že vlnové rovnice sú parciálne diferenciálne nehomogénne rovnice druhého rádu. Ich riešenie je značne komplikované a preto predpokladáme rôzne zjednodušenia. Vzhľadom na oddelenosť zložiek **E** a **H** budeme sa ďalej zaoberať len intenzitou elektrického poľa. Bežne sa používajú materiály, ktoré môžeme považovať za bezstratové => $\rho = 0$, s konštantnou permeabilitou μ a s nehomogénnou permitivitou $\varepsilon(\mathbf{r})$. Zároveň predpokladáme, že permitivita je longitudinálne nezávislá, teda $\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon(x, y)$. Uvažujeme iba prípad šírenia monochromatickej elektromagnetickej vlny v komplexnej reprezentácii:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-j\omega t} \tag{2.2}$$

Potom môžeme vlnovú rovnicu prepísať do komplexného tvaru:

$$\nabla^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) + \beta^2\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\nabla\frac{\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}).\nabla\varepsilon(\mathbf{r})}{\varepsilon(\mathbf{r})}, \tag{2.3}$$

pričom $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon(\mathbf{r})}$, a člen $e^{-j\omega t}$ je vynechaný, lebo sa nachádza vo všetkých členoch rovníc. Vlnové rovnice vedú k ich úplnému vektorovému riešeniu. Toto presné riešenie je však pomerne zložité. Pre mnohé štruktúry je možné dosiahnuť výsledky s dostatočnou presnosťou za použitia kvázivektorového (semivektorového), alebo skalárneho priblíženia. Na úplné riešenie vektorovej vlnovej rovnice je potrebné určiť všetky tri zložky intenzity elektrického poľa E_x, E_y a E_z. Každá štruktúra, ktorá zodpovedá predchádzajúcim predpokladom je úplne určená ľubovoľnými dvoma zložkami intenzity elekrického poľa **E**, čo sa javí ako veľká výhoda pri numerickom riešení vlnových rovníc. Ak teda poznáme zložky elektrickej intenzity E_x a E_y, longitudinálna zložka vektora intenzity elektrického poľa E_z sa určí zo štvrtej Maxwellovej rovnice. Vlnová rovnica má potom v zložkovom tvare podobu:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \beta^2 E_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}E_x\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon}E_y\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) \tag{2.4a}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \beta^2 E_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon}E_y\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varepsilon}E_x\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) \tag{2.4b}$$

V štruktúrach s malým indexom lomu je vplyv viazanej polarizácie veľmi slabý. To umožňuje zanedbať väzobné členy vlnovej rovnice a zároveň zanedbáme členy s parcialnými deriváciami ε, pričom $E = E_x = E_y$. Vlnové rovnice prejdú na ich najjednoduchší zápis, ktorý je tiež známy ako Helmholtzova rovnica:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \beta^2 E = 0 \tag{2.5}$$

V práci [3] je uvedených niekoľko metód riešenia rovnice (2.5). Riešenie tejto rovnice je v prípade dielektrických štruktúr ľubovoľného prierezu dosť zložité. My uvažujeme dielektrický vlnovod kruhového prierezu. Potom Helmholtzová rovnica s využitím cylindrických súradníc (r, φ, z) prejde do tvaru:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \beta^2 E = 0, \qquad (r, \varphi, z) \in Q = (0, \rho) \times (0, 2\pi) \times (0, \infty) \tag{2.6}$$

Keďže riešenie tejto rovnice predpokladáme radiálne symetrické, bude intenzita elektrického poľa $E(r, \varphi, z)$ nezávislá od φ a z toho vyplýva, že člen $\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial\varphi^2}$ v tejto rovnici vypadne, lebo je rovný nule. Riešime parciálnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu tvaru:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \beta^2 E = 0, \qquad 0 < r < \rho, \qquad 0 < z < \infty, \tag{2.7}$$

s okrajovými podmienkami:

$$E(r,0) = E_0(r), \quad 0 < r < \rho, \tag{2.8}$$

$$E(\rho,z) = 0, \quad 0 < z < \infty. \tag{2.9}$$

Najväčšou ťažkosťou riešenia tejto úlohy je, že nevieme ako sa správa funkcia $E(r,z)$, keď premenná z konverguje do ∞. Jednou z metód riešenia je, že predpokladáme ohraničenosť v okolí nekonečna:

$$|E(r,z)| \le \infty, \quad (r,z) \in P, \quad \text{kde} \quad P = (0,\rho) \times (0,\infty) \tag{2.10}$$

3 RIEŠENIE HELMHOLTZOVEJ ROVNICE METÓDOU PARABOLICKEJ APROXIMÁCIE

Rovnicu (2.7) s okrajovými podmienkami (2.8), (2.9), (2.10) budeme riešiť metódou parabolickej aproximácie podobne ako v [1]. Na rovnicu (2.7) teda aplikujeme jednoduchú transformáciu:

$$E(r,z) = e^{ikz}\psi(r,z), \tag{3.1}$$

kde $\psi(r,z)$ je pomaly sa meniaca funkcia, tzv. obálková funkcia a $k \ge \beta(r)$ je ľubovoľne voliteľná konštanta a platí:

$$E(r,0) = E_0(r) = \psi(r,0) = \psi_0(r) \tag{3.2}$$

Člen (3.1) dvakrát zderivujeme podľa premennej z:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \left(-k^2\psi + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right) e^{ikz} \tag{3.3}$$

Dosadením do pôvodnej rovnice dostávame:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} + \left(\beta^2 - k^2\right)\psi(r,z) = 0 \tag{3.4}$$

Metóda riešenia parabolickou aproximáciou spočíva v tom, že v rovnici (3.4) zanedbáme člen $\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$, pretože predpokladáme, že $\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right| << 2k\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|$, a zároveň zvolíme $k = \beta$. Potom dostaneme rovnicu parabolického typu:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \tag{3.5}$$

pričom aj tu platí vzťah (3.2). Riešenie vyjadríme v tvare:

$$\psi(r,z) = R(r).Z(z) \tag{3.6}$$

Dosadením do (3.5) dostaneme:

$$R''.Z + \frac{R'.Z}{r} + 2ik.R.Z' = 0 \tag{3.7}$$

Po vydelení členom $R.Z$ a separáciou premenných dostaneme:

$$\frac{R'' + \frac{R'}{r}}{R} = -\frac{2ik.Z'}{Z} = -\lambda \tag{3.8}$$

Pretože funkcie na ľavej a pravej strane poslednej rovnosti majú rôzne premenné a rovnosť platí na celom kruhu Ω, musia sa obe strany rovnať konštante, ktorú označíme –λ. Ďalšou úpravou dostaneme dve separované diferenciálne rovnice:

$$R''(r) + \frac{R'(r)}{r} + \lambda.R(r) = 0, \quad 0 < r < \rho \tag{3.9}$$

$$R(\rho)=0, \qquad |R(0)|<\infty \tag{3.10}$$

$$2ik.Z'(z)-\lambda.Z(z)=0, \qquad 0<z<\infty \tag{3.11}$$

Po vynásobení rovnice (3.9) členom r^2 dostávame:

$$r^2R''(r)+r.R'(r)+\lambda.r^2.R(r)=0 \tag{3.12}$$

Z teórie Besselových funkcií ([2]) vieme, že existuje postupnosť vlastných hodnôt $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ a vlastných funkcií $\{R_m\}_{m=1}^{\infty}$ úlohy (3.12), (3.10) tvaru:

$$R_m = A_m J_0\left(\sqrt{\lambda_m}\,r\right)+B_m N_0\left(\sqrt{\lambda_m}\,r\right), \qquad m=1,2,..., \tag{3.13}$$

čo je vlastne všeobecné riešenie úlohy pre $R(r)$, kde J_0 je Besselova funkcia prvého druhu nultého rádu, N_0 je Besselova funkcia druhého druhu nultého rádu a A_m, B_m sú ľubovoľné konštanty. Z podmienky $|R(0)|<\infty$ vyplýva $B_m=0$. Z vlastností Besselových funkcií je totiž funkcia $N_0\left(\sqrt{\lambda_m}\,r\right)$ neohraničená v okolí bodu $\sqrt{\lambda_m}\,r=0$, a tak $B_m=0$. Z podmienky $R(\rho)=0$ dostávame podmienku pre vlastné hodnoty $J_0(\mu_m)=0$, kde $\mu_m=\sqrt{\lambda_m}\,\rho$ je m-tý koreň Besselovej funkcie J_0. Vlastné hodnoty majú potom tvar:

$$\lambda_m=\left(\frac{\mu_m}{\rho}\right)^2, \tag{3.14}$$

a vlastné funkcie úlohy (3.12), (3.10) majú tvar:

$$R_m(r)=J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right), \tag{3.15}$$

pričom sme zvolili konštantu $A_m=1$. Po vydelení rovnice (3.11) členom 2ik a dosadení vlastných hodnôt dostávame diferenciálnu rovnicu prvého rádu:

$$Z_m'(z)+i\left(\frac{\mu_m}{\rho}\right)^2.\frac{1}{2k}Z_m(z)=0, \tag{3.16}$$

ktorej riešením je funkcia:

$$Z_m(z)=C_m e^{-i\frac{\mu_m^2}{\rho^2}\frac{1}{2k}z}, \tag{3.17}$$

kde C_m je ľubovoľná konštanta. Vyjadríme riešenie v tvare funkcionálneho radu:

$$\psi(r,z)=\sum_{m=1}^{\infty}C_m e^{-i\frac{\mu_m^2}{\rho^2}\frac{1}{2k}z}J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right) \tag{3.18}$$

Koeficienty C_m určíme tak, aby bola splnená začiatočná podmienka pre $z=0$. Z vlastností Besselových funkcií ([2]) môžeme funkciu $\psi_0(r)$ rozvinúť do Fourierovho radu podľa Besselových funkcií $J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)$. Koeficienty C_m Fourierovho rozvoja dostaneme pomocou vzorca:

$$C_m=\frac{2\pi}{\left\|J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)\right\|^2}\int_0^{\rho}r\psi_0(r)J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)dr \tag{3.19}$$

Normu vo vzťahu (3.19) možno prepísať do jednoduchšieho tvaru:

$$\left\| J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)\right\|^2 = 2\pi\int_0^\rho rJ_0^2\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)dr = \pi\rho^2 J_1^2(\mu_m), \tag{3.20}$$

kde J_1 je Besselova funkcia prvého druhu prvého rádu. Po dosadení vzťahu (3.19) a (3.20) do (3.18) dostaneme riešenie:

$$\psi(r,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^\rho 2r\psi_0(r)J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)dr}{\rho^2 J_1^2(\mu_m)} e^{-i\frac{\mu_m^2}{\rho^2}\frac{1}{2k}z} J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right) \tag{3.21}$$

Dosadením vzťahu (3.21) do (3.1) dostávame celkové riešenie Helmholtzovej rovnice (2.6):

$$E(r,z) = \frac{2e^{ikz}}{\rho^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_0^\rho rE_0(r)J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right)dr}{J_1^2(\mu_m)} e^{-i\frac{\mu_m^2}{\rho^2}\frac{1}{2k}z} J_0\left(\frac{\mu_m}{\rho}r\right),$$

$$0 < r < \rho, \quad 0 < z < \infty \tag{3.22}$$

4 ZÁVER

V práci sme sa zaoberali matematickým modelom šírenia elektromagnetických vĺn vo vlnovode kruhového prierezu. Problém bol radiálne symetrický a po transformácii na cylindrické súradnice mala hľadaná funkcia elektrickej intenzity šírenia elektromagnetických vĺn tvar $E(r,z)$, $0 < r < \rho$, $0 < z < \infty$. Problém sme riešili zovšeobecnenými Fourierovými radmi podľa Besselových funkcií nultého rádu prvého druhu. Z predchádzajúceho postupu je vidieť, že použitie parabolickej aproximácie má opodstatnenie iba za týchto predpokladov:

1. funkcia $\psi(r,z)$ musí byť relatívne pomaly sa meniacou funkciou v smere šírenia
2. k musí byť dostatočne veľké, aby bolo možné člen s druhou deriváciou v smere šírenia zanedbať (v optoelektronike je to rádovo $10^6 m^{-1}$).

Keďže obidve podmienky sú v optoelektronike pomerne jednoducho splniteľné, parabolická aproximácia sa úspešne používa na riešenie optických vlnovodov. Použitím parabolickej aproximácie sa značne zjednodušilo zadávanie okrajových a začiatočných podmienok. Ak sa vyšetruje šírenie elektromagnetickej vlny vo vlnovode, ako začiatočnú podmienku stačí zadať profil danej funkcie na začiatku vlnovodu a na okraj výpočtového okna aplikovať buď Dirichletove, Neumannove, Newtonove, alebo zmiešané okrajové podmienky. Teda nie je nutné poznať rozloženie hľadanej funkcie aj na konci vlnovodu, ako je to pri vlnovej rovnici eliptického typu.

LITERATÚRA

[1] Bock, I.:Matematická fyzika, ES SVŠT Bratislava, 1987

[2] Koreněv, B. G.:Úvod do teorie Besselových funkcí, SNTL Praha, 1977

[3] Mičan, M.:Počítačové modelovanie šírenia elektromagnetických vĺn v dielektrických vlnovodných štruktúrach použitím „Beam Propagation Method“ (písomná práca k rigoróznej skúške)